Etkinlikle ilgili tüm materyallere ulaşmak için karekodu okutunuz.

ETKİNLİK ADI: PİSAGOR TEOREMİNİ İSPATLIYORUM

MODÜL/KONU: **Geometri/Üçgenler**

KAZANIMLAR:

- ❖ Pisagor teoremini açıklar.
- ❖ Pisagor teoremini farklı yöntemlerden yararlanarak ispatlar.

SÜRE: 2 ders saati

KULLANILACAK MATERYALLER: Etkinlik Formu, ip, makas, kâğıt, kalem.

MATEMATİKSEL İLİŞKİLENDİRME VEYA DİĞER DİSİPLİNLERLE İLİŞKİLENDİRME

Etkinlik Bilişim alanında yapılan algoritma yazımı ve uygulamaları ile ilişkilendirilmiştir.

ETKİNLİĞİN AMACI: Bu etkinliğin amacı, öğrencilerin Pisagor Teoremini açıklamalarını, Pisagor teoreminin geometrik ve cebirsel ispatlarını keşfetmelerini ve onu gerçek yaşamla ilişkilendirmelerini sağlamaktır.

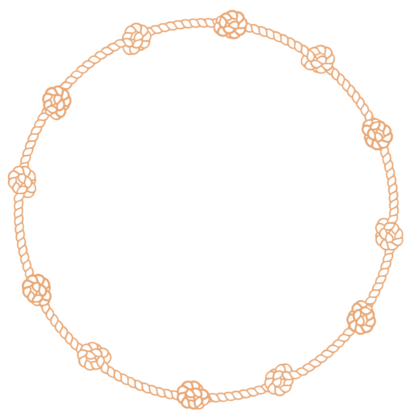
HAZIRLIK AŞAMASI

Sayı örüntüleri etkinliği blok kodlama programları ile yapılacağından öğrencilerden yanlarında tablet veya bilgisayar getirmeleri istenir. Bu mümkün değilse etkinlik için öğrencilerin bu araçları kullanabilecekleri bir ortamın hazırlanması gerekmektedir.

ÖĞRENME VE ÖĞRETME SÜRECİ

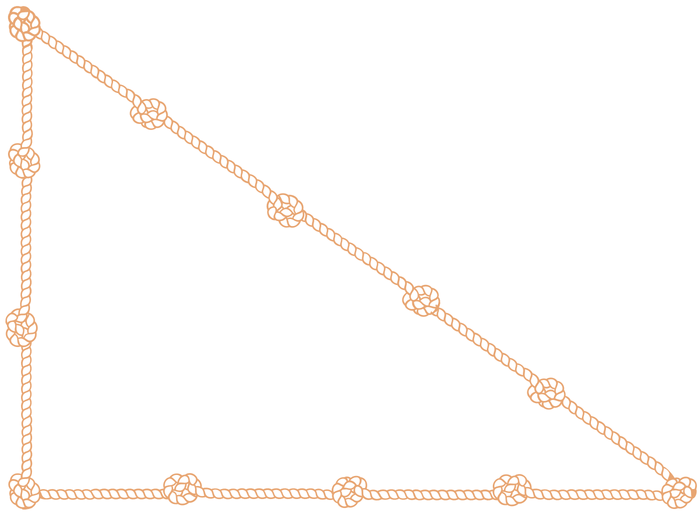
Öğretmen, 12 eşit aralıklı, 12 düğümü olan çember şeklindeki halatı öğrencilere gösterir. Öğrencilere “Bu halat ile bir duvarın dik olup olmadığını nasıl anlayabiliriz?” diye sorar.

Öğretmen, gönüllü üç öğrenciden halatın düğümlerinin olduğu yerlerden tutarak bir dik üçgen oluşturmaya çalışmalarını ister. Öğrencilerin çalışmalarının sonunda elde ettikleri kenar uzunlukları 3, 4 ve 5 birim olan Şekil 2’deki üçgenin bir dik üçgen olduğunu söyler.



Şekil 1 a. Eşit aralıklı, 12 birimli, 12 düğümlü halat.

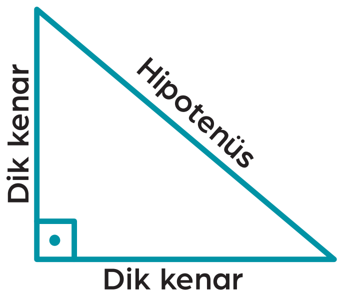
Öğretmen, bu dik üçgendeki kenar uzunlukları arasındaki ilişkinin matematiğin önemli teoremlerinden biri olan Pisagor Teoremi ile açıklandığını ifade eder. Teorem üzerinde çalışmadan önce öğrencilerle matematikçi ve filozof olarak anılan Pisagor'u (M.Ö. 570-495) tanıtmak üzere onun hayatı ile ilgili hazırlanmış videolar izlenir. Pisagor hakkında kısaca bilgi verildikten sonra; Pisagor teoremi adıyla anılan bu eşitliğin aslında daha önceden kullanılmakta ve bilinmekte olduğu söylenir (Saikia, 2015).



Şekil 2. Halat ile oluşturulan dik üçgen

Dik Üçgen Nedir?

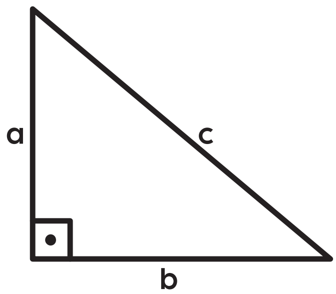
Öğretmen, öncelikle öğrencilere Şekil 3'teki dik üçgeni çizdirir. Ardından iki kenarı birbirine dik olan üçgenlerin dik üçgen olarak adlandırıldığı, dik üçgende iki dar açı ve bir tane dik açı olduğu ifade edilir. Dik açının karşısındaki ve dik üçgendeki en uzun kenarın hipotenüs olduğu belirtilir.



Şekil 3. Dik Üçgen

Pisagor Teoremi Nedir?

Dik üçgenlerde dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir. Dik kenarların uzunlukları a ile b iken hipotenüs c birim ile gösterilsin. O hâlde kenar uzunlukları arasında $a^2 + b^2 = c^2$ bağıntısı vardır.



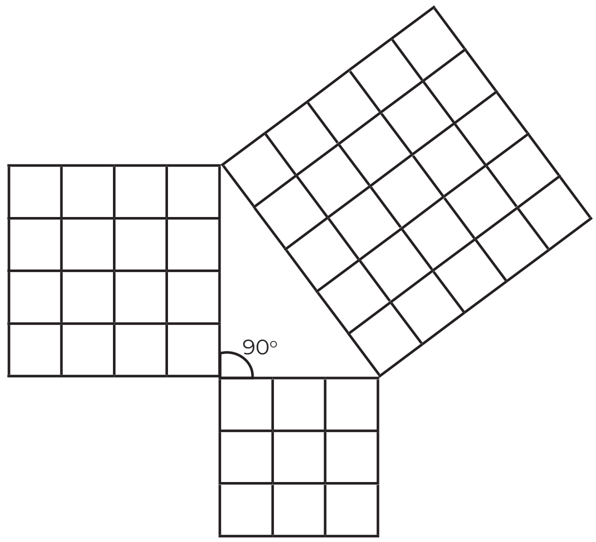
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Şekil 4. Pisagor Eşitliği

Öğrencilerle birlikte teoremin daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıdaki problemler üzerinde çalışılır.

Dik kenar uzunlukları 3 ve 4 birim olan bir üçgende hipotenüs kaç birimdir?

Öğrenciler, problemin çözümü üzerinde çalışırlar. Birim kareler kullanılarak Şekil 5'teki şekil öğrencilere çizdirilir. Ardından oluşturulan şekil ile Pisagor Teoremi arasındaki ilişki sorulur.



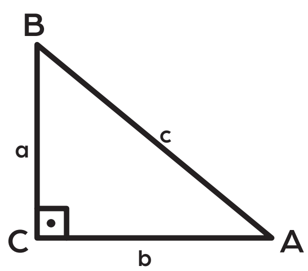
Şekil 5. Pisagor Teoreminin karesel bölgeler kullanılarak yapılan ispatı

Pisagor Teoreminin Çeşitli İspatları

1. Öğretmen, Pisagor Teoreminin en çok bilinen cebirsel ispatını açıklamak üzere öğrencilere aşağıdaki etkinliği yaptırır. Etkinlik öncesinde cebirsel ifadelerle çarpma işlemiyle ilgili önbilgileri aktif hâle getirmek için çalışmalar yapılır.

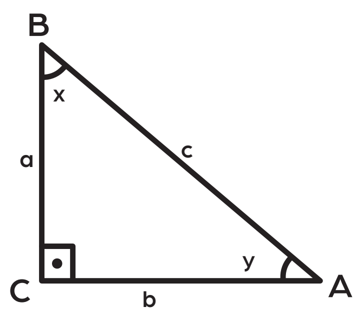
$a \, . \, a = a^2$, $\quad a \, . \, b = ab$, $\quad (a+b) \, . \, (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

1. Bir ABC dik üçgeni çizelim. Dik kenarlarının uzunluklarını a ve b ile hipotenüsü c ile isimlendirelim.



Şekil 6.a

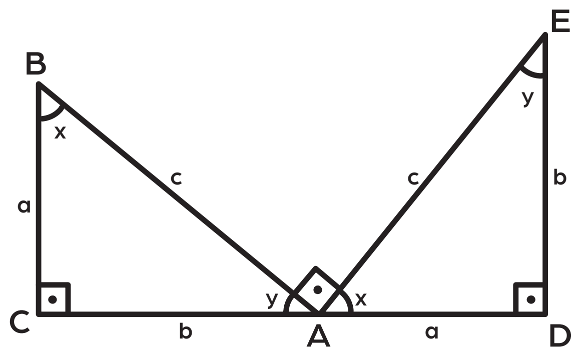
2. Bu üçgenin dar açılarından A açısının ölçüsü x ve B açısının ölçüsü y olsun. x+y=90°'dir.



Şekil 6.b

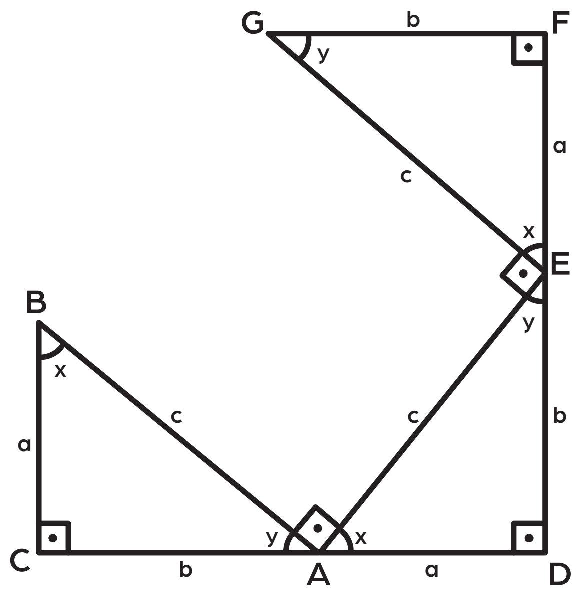
3. Bu üçgeni A noktası etrafında, saat yönünün tersi yönünde 90° döndürdükten sonra, Şekil 6 c'de olduğu gibi C, A, D noktaları doğrusal olacak şekilde yerleştirelim.

A köşesinde birleşen iki üçgenin iç açıları x ve y açılarıdır. x+y=90° olduğundan BAC açısı dik olacaktır.



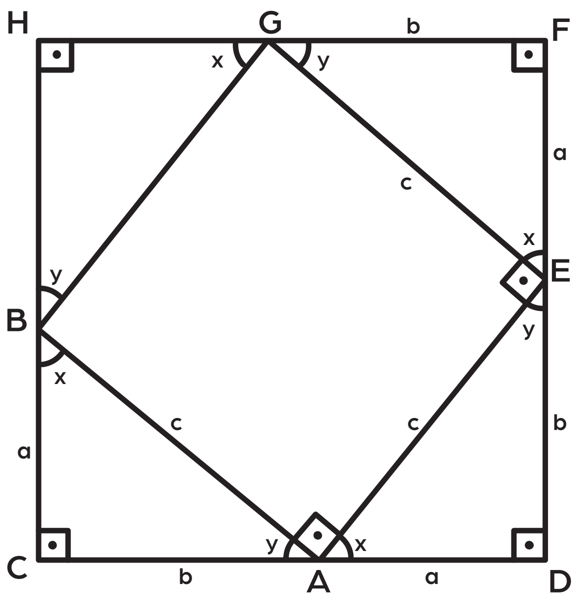
Şekil 6.c

4. ABC üçgenini A köşesi etrafında saat yönünün tersi yönünde 180° döndürüp D, E, F noktaları doğrusal olacak şekilde yerleştirelim.



Şekil 6.d

5. ABC üçgenini A köşesi etrafında saat yönünün tersi yönünde 270° döndürüp Şekil 6e'deki gibi F, G, H noktaları doğrusal olacak şekilde yerleştirdiğimizde bir kenarının uzunluğu (a+b) birim olan CDFH ve oluşan bu karenin içinde bir kenarı c birim olan AEGB kareleri oluşacaktır.



Şekil 6.e

6. Ortaya çıkan CDFH karesinin alanının ölçüsü iki farklı şekilde hesaplanabilir.

1. Kenar uzunluğu (a+b) birim olan karenin alan ölçüsü hesaplanarak:

$(a + b) . (a + b) = a . a + a . b + b . a + b . b = a^2 + 2ab + b^2$

2. Dik kenarları a ve b birim olan dört dik üçgenin ve bir kenarı c birim olan AEFB karesinin alan ölçülerinin toplamı hesaplanarak:

$\frac{4 . (a . b)}{2} + c^2 = 2ab + c^2$

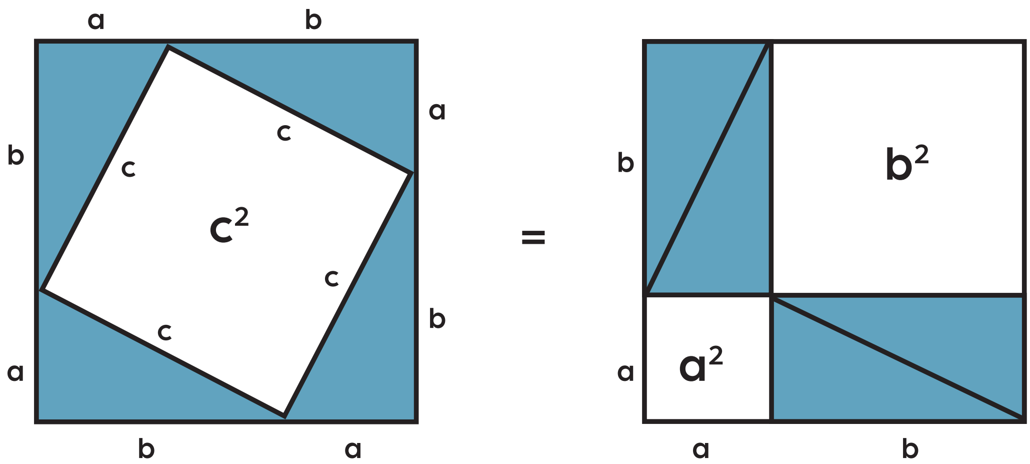
Her iki yolla elde edilen toplam alanların ölçüsü birbirine eşittir. Bu eşitliği yazdığımızda,

$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$

Her iki tarafta 2ab terimleri birbirini götürür. Geriye

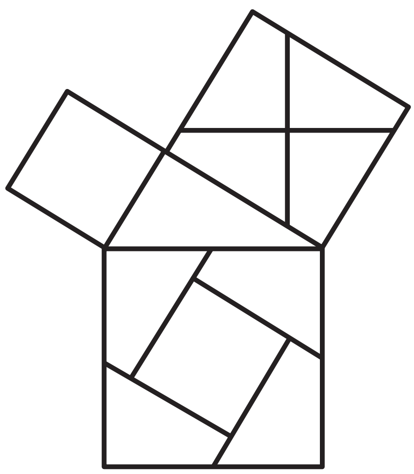
$a^2 + b^2 = c^2$ kalır. Bu eşitlik de bize Pisagor teoremini verir.

2. Şekil 7'de farklı bir ispat verilmiştir. En büyük iki karenin alan ölçüleri birbirine eşit olduğundan taralı olmayan bölgelerin alan ölçüleri de birbirine eşit olacaktır. Dolayısıyla yine $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliği elde edilir.



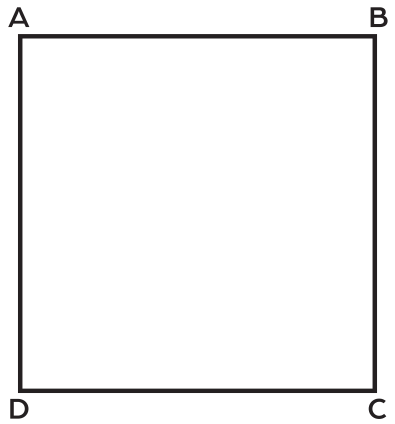
Şekil 7. Pisagor Teoreminin görsel ispatı

3. Öğretmen, Şekil 8'deki ispatı yapmak için öğrencilere aşağıdaki yönergeleri verir.



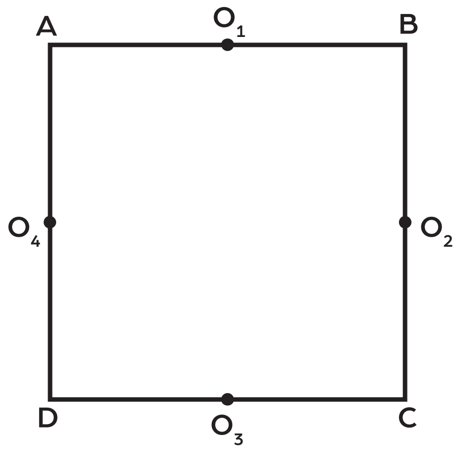
Şekil 8

1. Herhangi bir kare çizin. Bu karenin köşelerini A, B, C, D ile adlandırın.



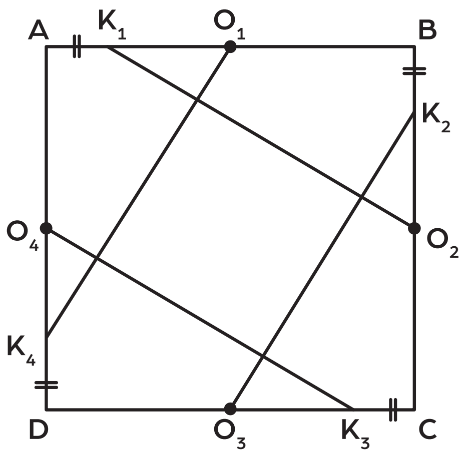
Şekil 9.a

2. ABCD karesinin kenarlarının orta noktalarını işaretleyin. Bu noktaları O_1, O_2, O_3, O_4 ile isimlendirin.



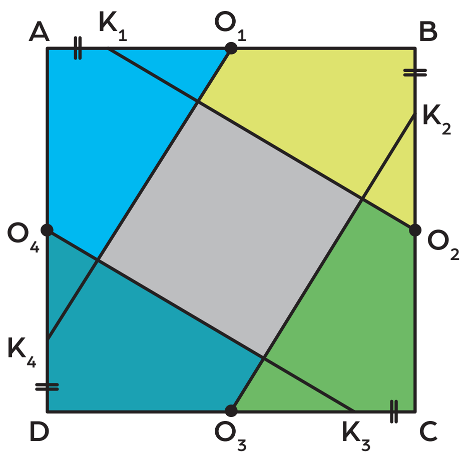
Şekil 9.b

3. A ile O_1 arasında bir nokta seçin. Bu nokta K_1 olsun. Şekil 9c'de görüldüğü gibi, $|AK_1| = |BK_2| = |CK_3| = |DK_4|$ olacak şekilde K_2, K_3, K_4 noktalarını da işaretleyin. O_1 ile K_4'ü, O_2 ile K_1'i, O_3 ile K_2'yi, O_4 ile K_3'ü birleştirelim.



Şekil 9.c

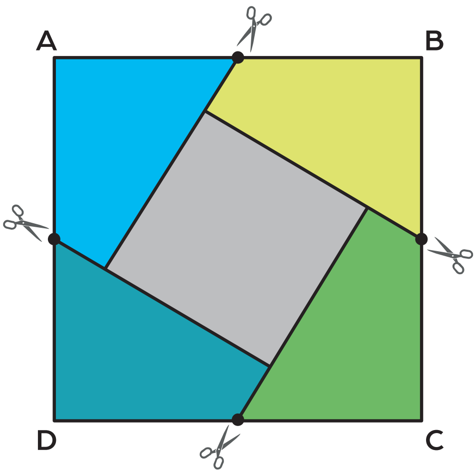
4. Aşağıdaki gibi bölgeleri farklı renklerle boyayın.



Şekil 9.d

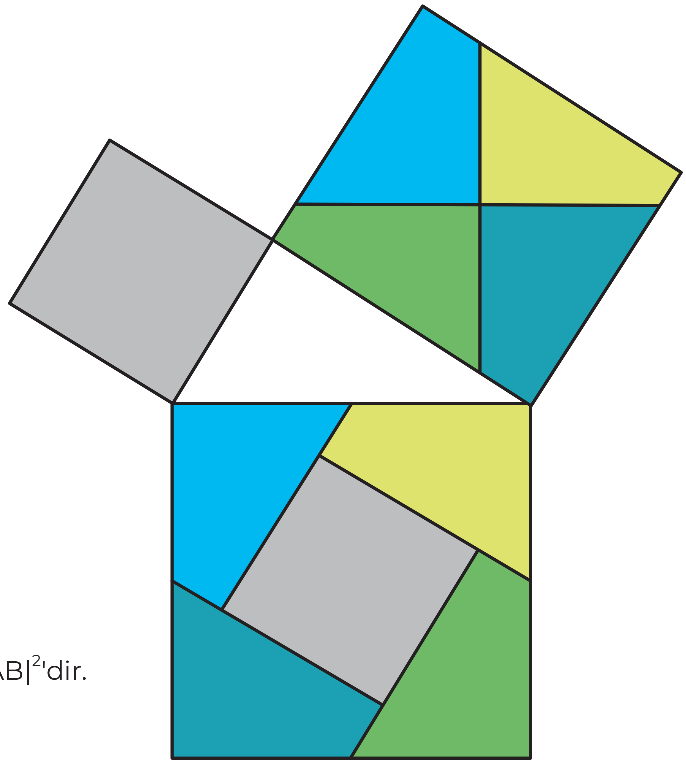
Şekil 9d'deki görselden bir adet daha çizin. Karelerden birini Şekil 9e'deki gibi makas ile gösterilen yerlerden kesin.

Kesilen renkli bölgelere ait parçaları Şekil 9f'deki gibi yerleştirin. Ardından öğrencilerin bu ispat üzerine görüşlerini alınız.



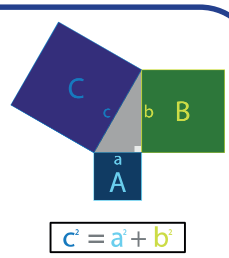
Şekil 9.e

Şekilden anlaşılacağı gibi $|AE|^2 + |EB|^2 = |AB|^2$'dir.


Şekil 9.f

BUNLARI BİLİYOR MUSUNUZ?

Eski Yunan filozoflarından Pisagor (M.Ö. 570-495), Güney İtalya'nın Croton şehrinde dini ve mistik özelliklere sahip bilimsel bir topluluk kurmuştur. Bu topluluk tarafından üretilen bilgilerin gizli tutulması esastır ve söz konusu bilgiler dışarıdan kimseyle paylaşılmamaktadır. Pisagor "Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı iki dik açının ölçüleri toplamına eşittir." ve "Bir dik üçgende en uzun kenarın uzunluk ölçüsünün karesi, diğer dik kenarların uzunluk ölçülerinin karelerinin toplamına eşittir." teoremleri ile tanınan büyük düşünürdür. Ayrıca Dünya'nın yuvarlak olduğunu ilk defa ortaya atan kişilerden biridir. Matematik, Müzik, Geometri ve Astronomi'nin gelişmesinde çok önemli katkıları olan Pisagor ve öğrencileri, evrende geometrik ve harmonik bir uyum olduğuna, doğal sayıların evreni yönettiğine ve sayıların geometrik bir anlamı olduğuna inanmaktadırlar (Yılmaz ve Misli, 2017).

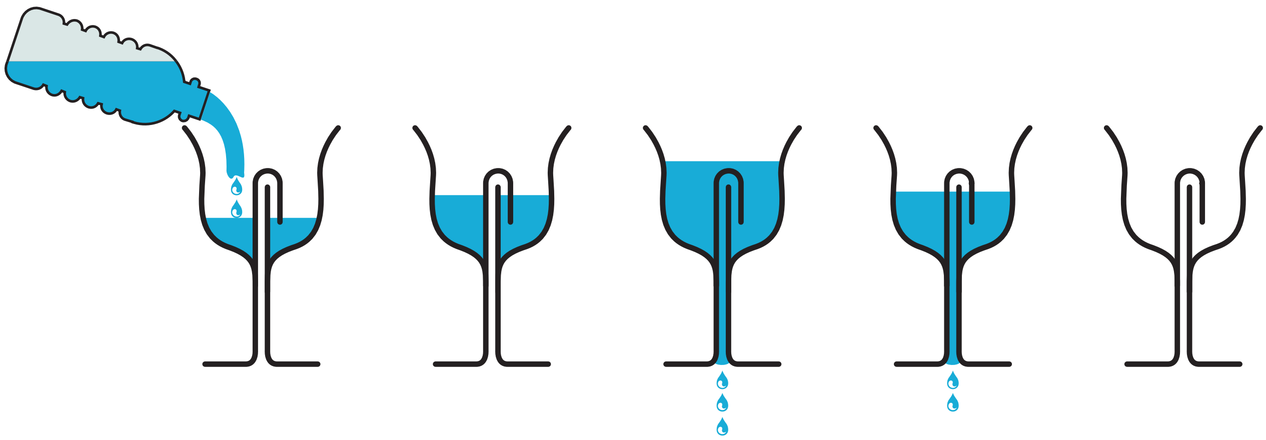



Şekil 10. Pisagor ve Pisagor Teoremi

BUNLARI BİLİYOR MUSUNUZ?

Pisagor'un en önemli buluşlarından bir tanesi de Adalet Kupası'dır. Bu kupa, görünüşte tıpkı diğer kupalar gibidir. Onu diğer kupalardan ayıran özelliği ise kupanın ortasında yer alan bir kolonun olması ve bu kolonun içinde yer alan kanaldır. Su, bu kolonun yüksekliğine kadar doldurulduğunda diğer kupalarda olduğu gibi durmaktadır (Şekil 2). Fakat su, bu kolonun yüksekliğini geçtiğinde ortadaki kolon ve içindeki kanal su ile dolmakta ve ardından sifon (siphon) etkisi devreye girmektedir. Böylece kupanın içindeki suyun tamamı dökülmektedir (Şekil 3) (Yılmaz ve Misli, 2017).

Şekil 11. Pisagor'un adalet kupası



Şekil 12. Pisagor'un Adalet Kupasındaki suyun dolup boşalması

Pisagor'un Adalet Kupası, bu özelliği ile sanki teknik araştırmalar sonunda üretilen gizemli bir eşya gibi görünmektedir. Sahip olduğu gizem ise, Pisagorcu okulun inanç felsefesini destekler niteliktedir. Kupanın altında bir delik vardır ancak sınırlar aşılmadığı sürece kupa boşalmamaktadır. Adalet Kupası bu haliyle adeta şu mesajı vermektedir: "Aza kanaat getirmeyen çoğu bulamaz." (Yılmaz ve Misli, 2017)

DÜŞÜNME KUTUSU

Pisagor Teoreminin tersi de doğru mudur? Bir üçgende c, en uzun kenarın uzunluğu olmak üzere, uzunlukları a, b ve c birim olan bir üçgen olsun. Eğer, $a^2 + b^2 = c^2$ ise, bu kenar uzunluklarına sahip olan üçgen her zaman dik açılı bir üçgen midir? (Huston 2017)

DÜŞÜNME KUTUSU

$a^n + b^n = c^n$

Yukarıdaki denklemde n yerine 2 yazıldığında denklem Pisagor teoremine dönüşmektedir. Sonuç olarak bu denklemi sağlayan a, b ve c tam sayıları mevcuttur. Bunlar Pisagor üçlüleri olarak geçmektedir. Kenarlarının uzunluk ölçüsü 1 ile 25 arasındaki tam sayılar olan kaç tane Pisagor üçlüsü vardır?

Buna göre aşağıdaki ifade doğru mudur?

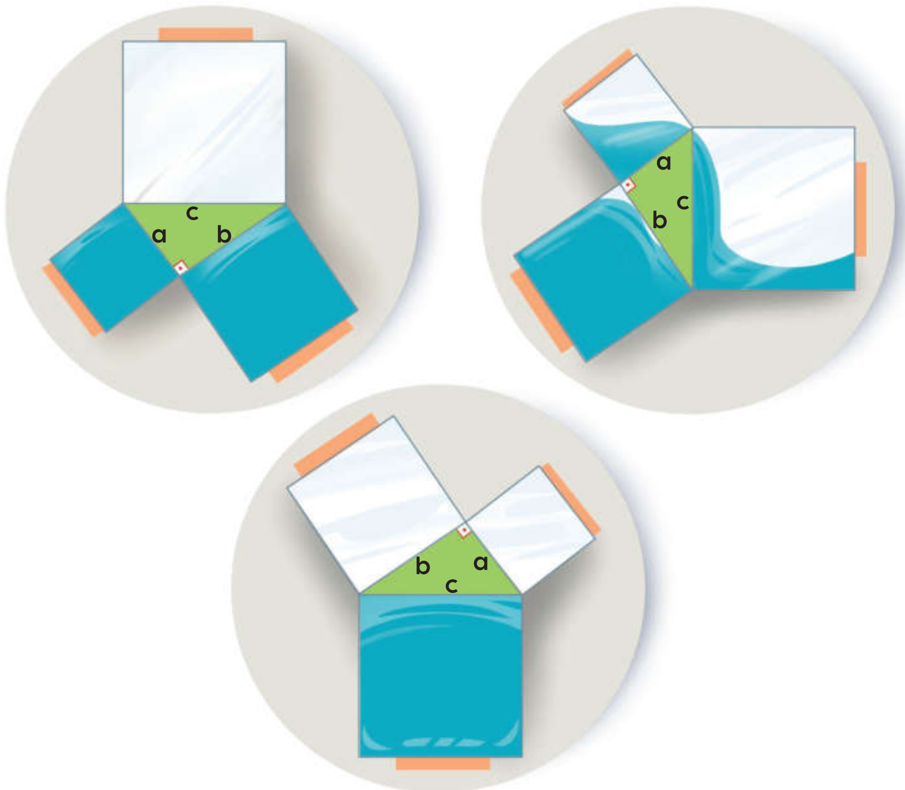
Bu bilgiler doğrultusunda "Eğer n>2 koşulunu sağlayan bir tam sayıysa, verilen denklemin pozitif tam sayılarda çözümü yoktur." ifadesinin doğru olup olmadığını açıklayınız.

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ 1

Kenar uzunluklarının ölçüsü tam sayı olan farklı (3-4-5, 5-12-13, 8-15-17 gibi) dik üçgenlerin varlığı incelenerek bu üçgenler arasındaki ilişkiler araştırılabilir.

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ 2

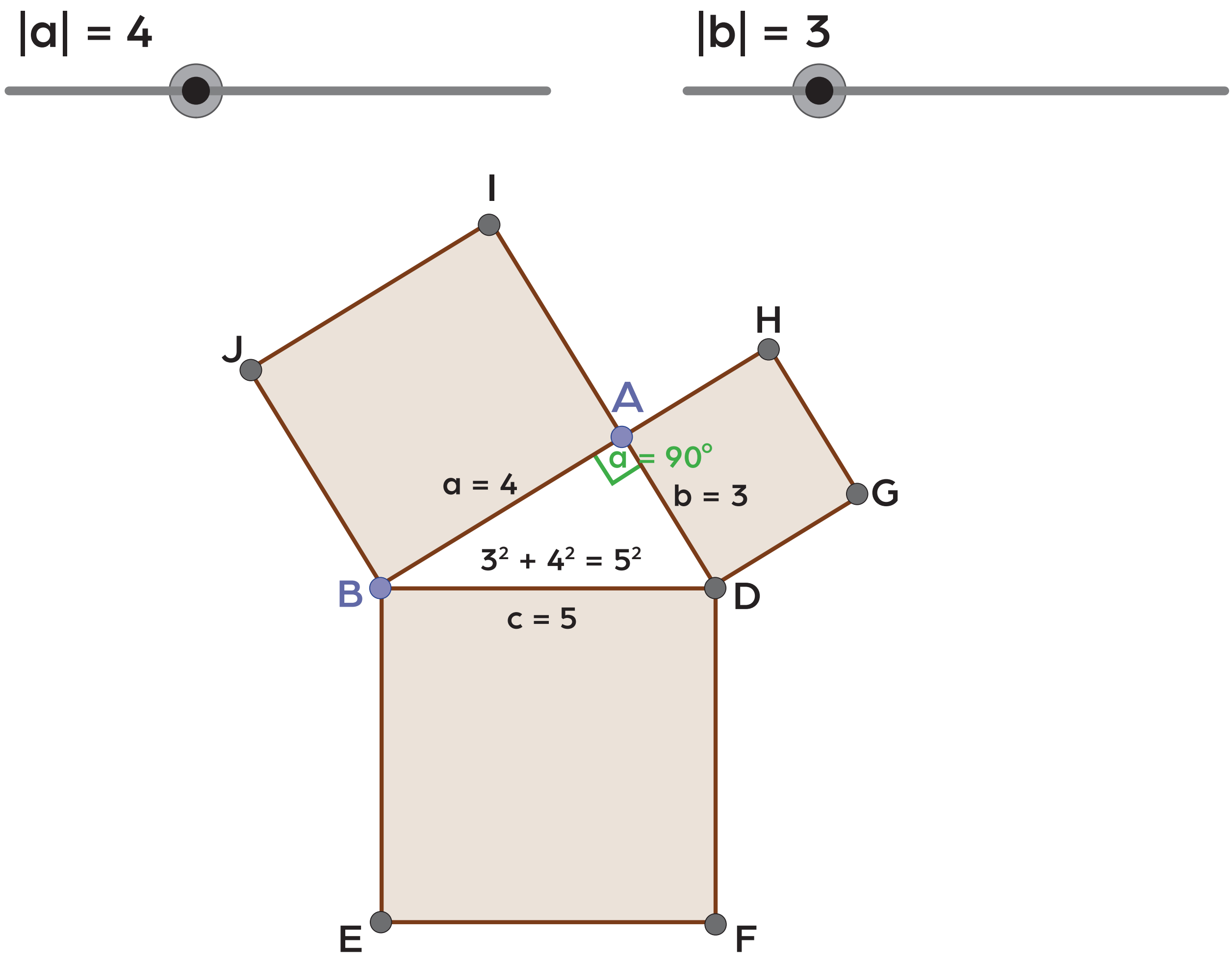
Pisagor teoreminin hacim ile ispatı aşağıdaki şekillerdeki gibi yapılabilir.



Şekil 12. Pisagor Teoreminin hacim ile ispatı

EK ETKİNLİK ÖNERİSİ 3

Pisagor Teoreminin dinamik geometri ile ispatının modellemesi aşağıda verilmiştir. İspat modelinin yer aldığı dinamik geometri programına aşağıdaki karekodla ulaşılabilir.



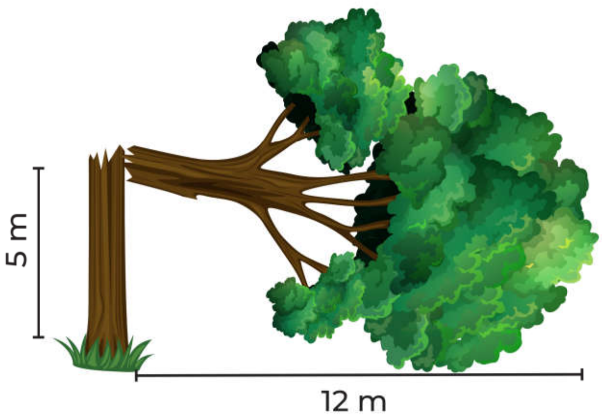
Şekil 13. Dinamik geometri programı ile Pisagor Teoreminin ispatı.

DEĞERLENDİRME

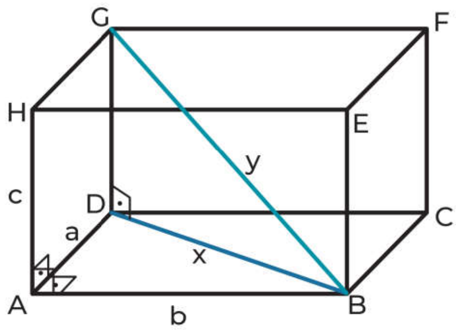
Öğrencilerin geçirdikleri süreç, Pisagor Teoremi için hazırlanan Pisagor Teoremini İspatlıyorum Dereceleme Ölçeği ve Değerlendirme Sorularına verilen cevaplara göre değerlendirilir. Dereceleme ölçeği puanlama anahtarına ilgili karekod okutarak ulaşılabilir.

DEĞERLENDİRME SORULARI

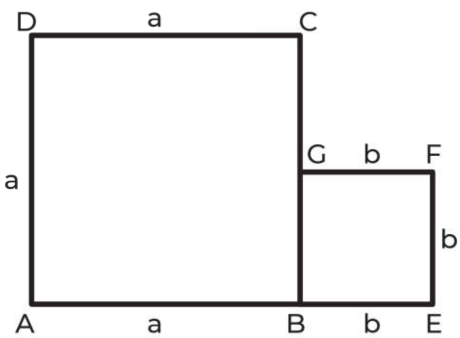
1. Aşağıdaki gibi bir ağaca yıldırım düşmüş ve ağaç gövdesinden şekildeki gibi kırılarak devrilmiştir. Ağacın kırılmadan önceki boyu kaç metredir?



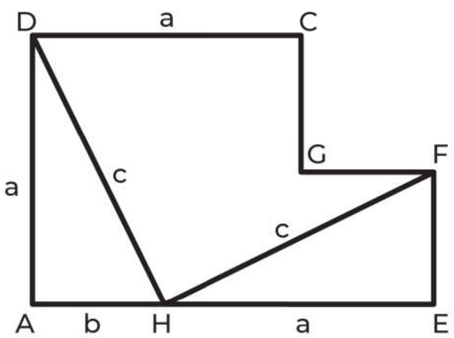
2. Ayrıt uzunlukları a, b ve c birim olan dikdörtgenler prizmasının ABCD yüzeyinin yüzey köşegeni x, prizmanın cisim köşegeni y'dir. Buna göre a, b, c, x ve y'nin değerinin tam sayı olduğu bir dikdörtgenler prizması çizilebilir mi? Neden?



3. Şekil 1a'da verilen ABCD ve BEFG karelerinden yararlanılarak Pisagor Teoremi'nin ispatını yapınız. Bunun için Şekil 1b'deki gibi c kenarının çizilmesiyle başlanan görsel ispat, teoreme ulaşmak için nasıl devam ettirilmelidir? Açıklayınız.



Şekil 1.a



Şekil 1.b

KAYNAKLAR

Benjamin, A. (2018). *Matematiğin Sihirli Dünyası.* (Çev. Hakan Doğan, Uğur Doğan, Boğaç Karçıka, Ayhan Dil, Uğur Efem). Nika Yayınevi

Huston, K. (2017). *Matematikçi Gibi Düşünmek.* (Çev. Mehmet Terziler, Tahsin Öner.) Palme Yayıncılık.

Saikia, M. P. (2015). *The Pythagoras Theorem*, Asia Pacific Mathematics Newsletter, 5(2), 5-8.

Yılmaz, O., & Misli, Ç. (2017). Pisagor'un Adalet Kupası, *Fizik Dünyası,* 1(3), 1-8.